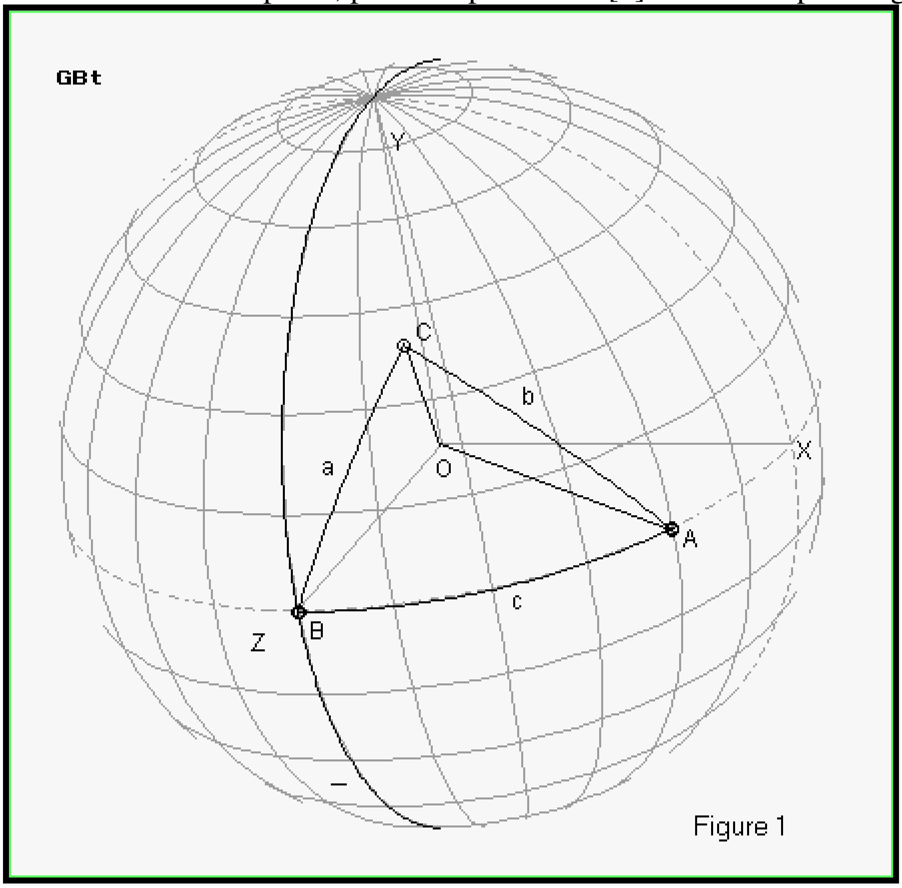
Principe de la trigonométrie sphérique :

I -Définition du triangle sphérique :

Toute les définitions qui suivent utilisent une sphère de rayon unité. Un grand cercle est un cercle dessiné à la surface de la sphère et dont le plan passe par le centre de celle-ci. Par 2 points ne peut passer qu'un seul grand cercle, sauf si ces points sont diamétralement opposés, dans ce cas il y a une infinité de grands cercles.

Un triangle sphérique est une portion de la surface de cette sphère limitée par 3 grands cercles. Il s'agit toujours de la plus petite surface. Les côtés du triangle sont mesurés par les angles vus du centre de la sphère, par exemple le côté [b] est mesuré par l'angle [AOC] (**fig. 1**).



Le principe retenu est d'appeler un côté par la lettre minuscule de l'angle au sommet opposé, le côté [b] est
opposé à l'angle [B]. Un angle au sommet, par exemple [B] est mesuré par l'angle du dièdre qui contient les 2
côtés adjacents et le centre de la sphère, c'est-à-dire les 2 plans formés par :
- les 3 points A, O, B
- les 3 points B, O, C

Le principe de la trigo-sphérique est de donner les relations entre les côtés [a, b, c] et les angles [A, B, C] du
triangle.

II - Etablissement des formules :

Le triangle est positionné de tel manière que le côté AB soit dans le plan XOZ, OZ passe par B, C est dirigé
dans le même sens que Y (fig. 1). Avec ces notations on calcule les coordonnées du point C :

formules 1
x = sin(a) . cos(B)
y = sin(a) . sin(B)
z = cos(a)

Puis on fait tourner la sphère autour de l'axe Y (fig. 2) pour amener l'axe Z sur le point A. De la même manière que précédemment on calcule les coordonnées de C.

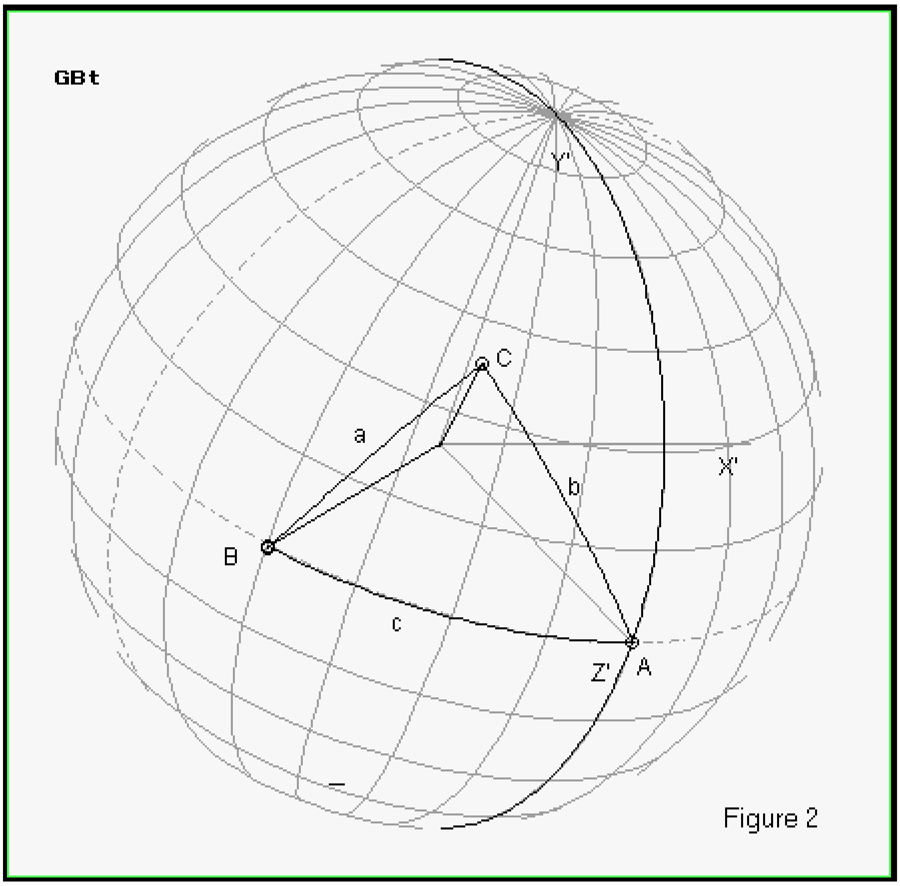
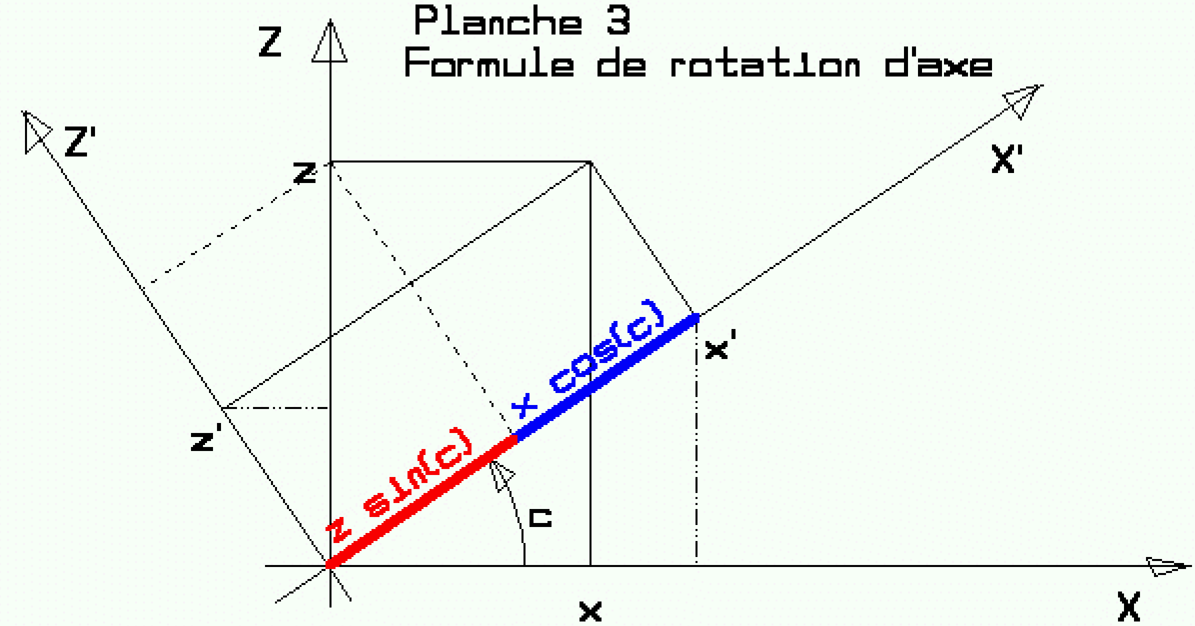


Figure 2

formules 2
x' = -sin(b) . cos(A)
y' = sin(b) . sin(A)
z' = cos(b)

Pour passer du premier au deuxième système on effectue une rotation autour de l'axe Y d'un angle [c], dessinée dans le plan [XOZ] (fig. 3) donne :

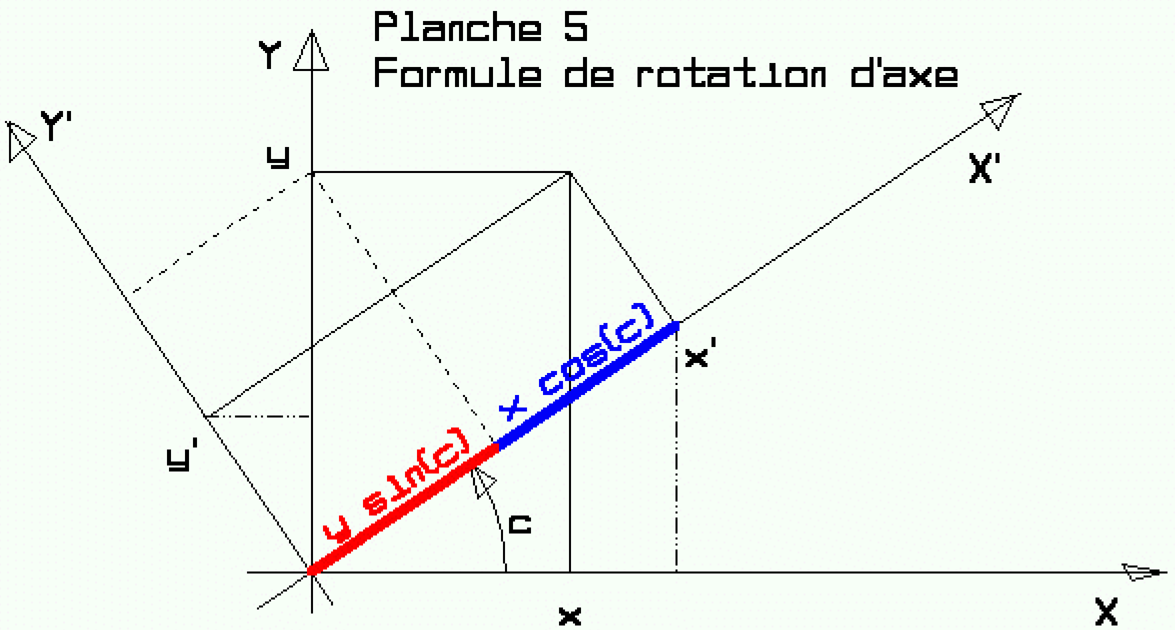


x' = x cos(c) + z sin(c)
z' = z cos(c) − x sin(c)

x = x' cos(c) − z' sin(c)
z = z' cos(c) + x' sin(c)

Figure 3

les formules qui permettent de trouver les coordonnées après un changement d'axe.
idem rotation suivant axe X (fig.4).



x' = x cos(c) + y sin(c)
y' = y cos(c) − x sin(c)

x = x' cos(c) − y' sin(c)
y = y' cos(c) + x' sin(c)

Figure 4

formules 3
x' = x . cos(c) + z .sin(c)
y' = y
z' = z . cos(c) - x . sin(c)

formules 4
x = x' . cos(c) - z' . sin(c)
y = y'
z = z' . cos(c) + x' . sin(c)

En prenant les formules 1 et 2 et en les reportant dans la formule 4, en tenant compte que l'on effectue une rotation de[c] et des relations suivantes.

formules 5
cos(-c) = cos(c)
sin(-c) = -sin(c)

On trouve alors le trio de formules qui est le départ de toutes les formules de trigo-sphèrique.

formules 6
{6.1} sin(a) . cos(B) = cos(b) . sin(c) - sin(b) . cos(c) . cas(A)
{6.2} sin(a) . sin(B) = sin(b) . sin(A)
{6.3} cos(a) = cos(b) . cos(c) + sin(b) . sin(c) . cos(A)

A partir de {6.3} et par permutation circulaire des lettres on trouve les combinaisons utilisées habituellement.

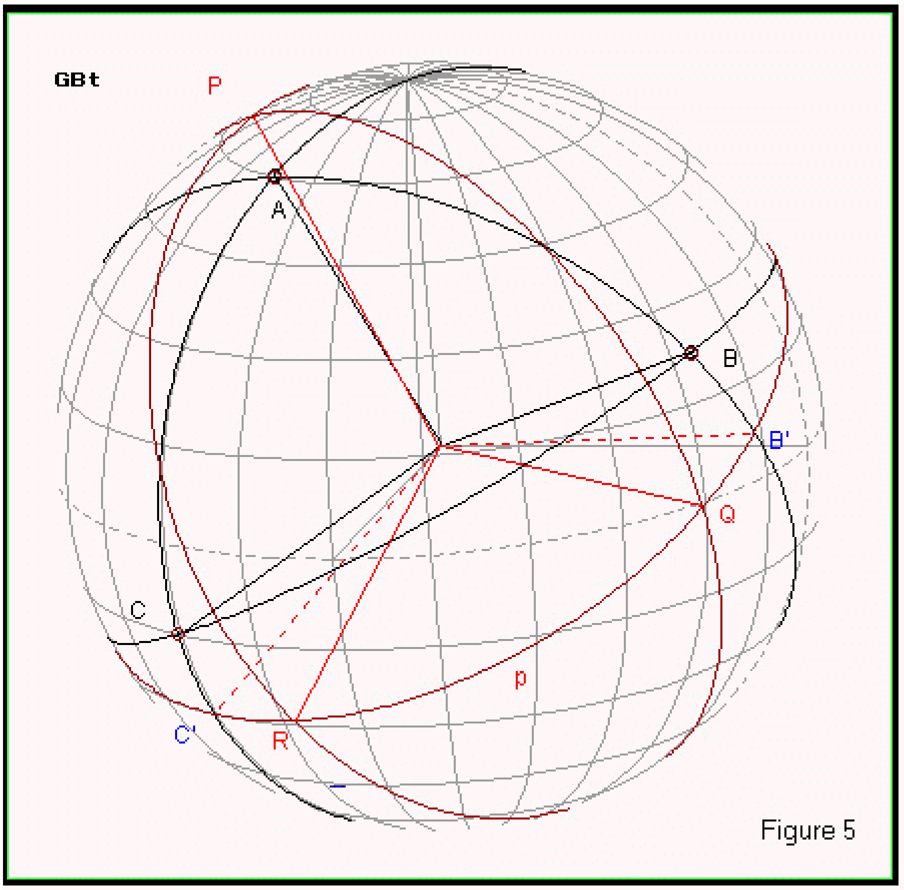
formules 7
{7.1} cos(a) = cos(b) . cos(c) + sin(b) . sin(c) cos(A)
{7.2} cos(b) = cos(c) . cos(a) + sin(c) . sin(a) . cos(B)
{7.3} cos(c) = cos(a) . cos(b) + sin(a) . sin(b) . cos(C)

A partir de {6.2} on établit :

formules 8
sin(a) / sin(A) = sin(b) / sin(B) = sin(c) / sin(C)

En partant des principes suivants :

-Les relations entre le triangle et le triangle polaire, c'est-à-dire les angles de l'un sont les suppléments des côtés de l'autre (fig. 5)



note : la relation du supplément est : x devient pi - x

- Une formule trouvée pour un triangle est valable quelque soit le triangle
- On peut remplacer A par pi - a

p; B par pi - b
p; C par pi - c
p; a par pi - A
p; b par pi - B
p; c par pi - C

- sin(pi - x) = sin(x)
- cos(pi - x) = -cos(x)

A partir des formules 7 on peut écrire

formules 9

{9.1} cos(A) = -cos(B) . cos(C) + sin(B) . sin(C) . cos(a)
{9.2} cos(B) = -cos(C) . cos(A) + sin(C) . sin(A) . cos(b)
{9.3} cos(C) = -cos(A) . cos(B) + sin(A) . sin(B) . cos(c) faites une pose !!

Principe d'utilisation de la trigonométrie sphérique :

On définit en premier un point d'observation de l'univers, par exemple un point à la surface de la terre, au centre
de la terre, au centre du soleil, etc ..

Ce point est alors le centre d'une sphère de rayon unité qui est utilisé comme intermédiaire de calcul.

La direction d'un objet est observée et représentée par un point à la surface de la sphère.
L'angle entre deux directions observées est représenté par le plus petit des deux arcs des 2 grands
cercles qui joignent les deux points. L'angle entre ces deux directions observées est mesuré par cet arc de cercle qui sur
une sphère de rayon unité a la même longueur que l'angle entre les deux directions exprimé en radian (définition du radian).

Le premier travail à effectuer est de positionner la sphère par rapport à des références. Une commodité consiste à graduer la sphère comme la terre avec des méridiens et des parallèles et à définir les références choisies sur cette sphère.
Généralement on choisit de positionner les références à des endroits commodes qui sont un compromis entre le système de mesures et les graduations de la sphère. Lorsque l'on représente la sphère sur une feuille (un plan) il faut dire si elle est vue depuis le centre ou vue de l'extérieur.

Exemple : Nous sommes à la surface de la terre supposée plane et nous observons un objet A dans le ciel à l'aide d'un théodolite. Le théodolite a 2 cercles gradués et orthogonaux. Le cercle dans un plan vertical (monté sur l'axe horizontal) mesure l'élévation au dessus de l'horizon, son zéro est à l'horizontale et les angles croissent vers le zénith.
Le cercle horizontal (monté sur l'axe vertical) mesure l'azimut ou la direction de l'objet, son zéro est dans la direction du sud, les angles vont en croissant vers l'est.

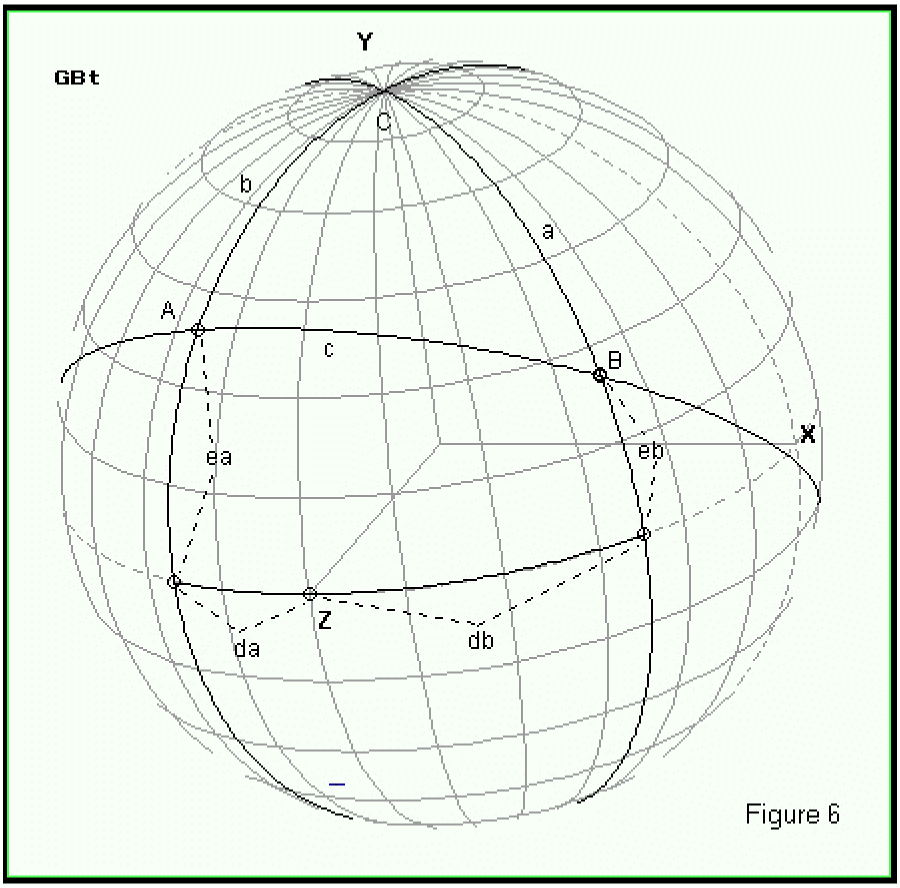
Sur la sphère nous choisissons de disposer la ligne d'horizon sur l'équateur, le zénith au pôle sur l'axe Y, la direction du sud sur l'axe Z. La sphère sur le papier est **vue de l'extérieur.** L'axe X est dans la direction de l'est. De cette manière, la représentation de la sphère est complètement définie.

Pour l'objet A nous mesurons une direction [da] et une élévation [ea] idem pour B [eb] et [db] . Voir (**fig.6**) qui donne une représentation des mesures.

Supposons que l'on cherche l'angle entre A et B vu de l'observateur. On forme alors un triangle sphérique de sommets
A, B, C et de côtés a, b, c. Le point C est au zénith (au pôle sur la sphère).

Dans ce triangle on connaît :
a = (pi/2) - eb
b = (pi/2) - ea
C = db - da (attention au signe)

L'angle entre A et B est donné par c. On connaît a, b, C on cherche C, la formule à utiliser est : {7.3}
cos(c) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b).cos(C)
d'où : **c = arcos(cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b).cos(C)). CQFD**



Principales difficultés liées à l'informatique :

I - Les unités d'angles employées en astronomie sont :

- les degrés décimaux
- les degrés, minutes, secondes
- l'heure, minutes, secondes
- le tour
- le radian

II - Plage de variation des angles :

- pour l'équivalent de la latitude on trouve en général de +90°.0 à -90°.0 décimaux
- pour l'équivalent de la longitude on trouve des plages de 0.0° à 360°.0 et dans d'autres systèmes de -180°.0 à +180°.0 décimaux
- pour certains mouvements en équivalent longitude on trouve des angles plus grands que 360°.0 décimaux
- l'angle entre 2 directions est toujours inférieur à 180°.0 et parfois signé.

III - Principales sources d'erreurs :

- calcul de différence d'angles ex : 2° - 359° = 3° !!
- le calcul de tangente 90°
- la division par 0
- les arc sinus et arc cosinus qui dépassent 1 en valeur absolue

- l' arc cosinus qui ne donne pas de valeur négative
- les arc sinus et arc tangente qui donnent des valeurs entre -90° et +90°
- les latitudes supérieures à 90° en valeur absolue
- etc ...

IV - Conseils

- dans les logiciels de calcul, se décider pour une unité d'angle et une seule
- créer des fonctions qui convertissent les unités d'angle utilisées
- créer des fonctions qui normalisent les plages de variation des angles
- créer des fonctions qui traitent les valeurs plus grandes que 1 en valeur absolue
- décider des valeurs à fournir en cas de division par 0 ou par tangente 90°
- etc ... *SINON DUR DUR LE DEBOGAGE*

Biographie Gérard Baillet

F4DXU